Ueber die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. November 1897.

In der Theorie der Gaussischen complexen ganzen Zahlen spielen bekanntlich die lemniscatischen Functionen (d. h. diejenigen elliptischen Functionen, für welche das Periodenverhältniß gleich der imaginären Einheit i ist) dieselbe Rolle, wie die trigonometrischen Functionen in der Theorie der reellen ganzen Zahlen. Ich vermuthete daher, daß die Entwicklungscoefficienten einer geeignet gewählten lemniscatischen Function ähnliche zahlentheoretische Eigenschaften besitzen möchten, wie die Bernoulli'schen Zahlen, welche die Entwicklungscoefficienten der Cotangente bilden. Diese Vermuthung fand bei genauerer Untersuchung ihre vollkommenste Bestätigung, und ich möchte mir erlauben, dieses in den folgenden Zeilen des Näheren darzulegen.

Wenn man zur Abkürzung

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{1}$$

setzt, so befriedigt die Weierstraß'sche Function $\wp(u)$, deren Primitivperioden ω und $i\omega$ sind, die Differentialgleichung

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - 4\wp(u). \tag{2}$$

Ich setze nun die Entwicklung dieser Function $\wp(u)$ nach aufsteigenden Potenzen von u in der folgenden Form an:

$$(3)\quad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2^4 E_1}{4} \cdot \frac{u^2}{2!} + \frac{2^8 E_2}{8} \cdot \frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{2^{4n} \cdot E_n}{4n} \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} + \cdots.$$

Dann sind es die durch diesen Ansatz definirten Zahlen

$$(4)\qquad E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots\ldots,$$

welche das Analogon der Bernoulli'schen Zahlen bilden.

Die Zahlen E_n sind reelle positive rationale Zahlen, welche sich der Reihe nach auf Grund der Gleichung

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - 2$$

berechnen lassen. Setzt man nämlich in diese Gleichung die Entwicklung (3) für $\wp(u)$ ein, so ergiebt sich zunächst $E_1 = \frac{1}{10}$ und sodann die, für jedes ganzzahlige $n > 1$ geltende, Recursionsformel

$$(5)\quad E_n = \frac{3}{(2n-3)(16n^2-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (4k-1)(4n-4k-1)(4n)_{4k} E_k E_{n-k},$$

wo $(4n)_{4k}$ den $4k$ten Binomialcoefficienten zur Basis $4n$ bezeichnet.

Wie vermöge der Bernoulli'schen Zahlen B_n sich die Summen der reciproken Potenzen der reellen ganzen Zahlen ausdrücken lassen, so lassen sich die Summen der reciproken Potenzen der complexen ganzen Zahlen vermöge der Zahlen E_n darstellen. Aus der Partialbruchzerlegung der Function $\wp(u)$ ergiebt sich nämlich unmittelbar:

$$(6)\qquad \sum{}' \frac{1}{(r+is)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} E_n,$$

wobei die Summe über alle complexen ganzen Zahlen $r + is$ mit Ausschluß der Null auszudehnen ist. Die Analogie dieser Gleichung (6) mit der bekannten Gleichung:

$$\sum{}' \frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n,$$

in welcher die Summe über alle reellen (positiven und negativen) ganzen Zahlen r mit Ausschluß der Null auszudehnen ist, tritt besonders deutlich hervor, wenn man beachtet, daß

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ist.}$$

Ich komme nun zu dem Hauptergebniß meiner Untersuchung, nämlich zu demjenigen Satze über die Zahlen E_n, welcher dem v. Staudt-Clausen'schen Satze über die Bernoulli'schen Zahlen entspricht. Um den in Rede stehenden Satz möglichst einfach aussprechen zu können, will ich mich der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Der Buchstabe p bedeute eine Primzahl von der Form $4k+1$, und wenn

$$p = a^2+b^2$$

die Zerlegung einer solchen Primzahl in die Summe zweier Quadrate vorstellt, so soll a^2 immer das ungerade Quadrat sein. Die Zahl a selbst soll mit einem solchen Vorzeichen genommen werden, daß die Congruenz

$$a \equiv b+1 \pmod 4$$

erfüllt ist. Hiernach wird z. B. für

$$p = 5 = 1^2+2^2,\ p = 13 = 3^2+2^2,\ p = 17 = 1^2+4^2,\ p = 29 = 5^2+2^2,$$

der Reihe nach

$$a = -1, \qquad a = 3, \qquad a = 1, \qquad a = -5$$

sein. Ferner will ich voraussetzen, die Zahlen E_n seien in Form von Brüchen dargestellt, deren Zähler und Nenner positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, wodurch dann die Bezeichnung „Nenner der Zahl E_n" einen unzweideutigen Sinn erhält.

Dies festgesetzt, besteht nun der folgende Satz:

„Der Nenner der Zahl E_n enthält nur einfache Primfactoren, und zwar außer der Primzahl 2 alle und nur diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$, für welche $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist. Ueberdies gilt die Gleichung

$$E_n = G_n+\tfrac{1}{2}+\sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p},$$

wo die Summation über die genannten Primzahlen p auszudehnen ist, während G_n eine ganze Zahl bezeichnet."

Für die Zahlen G_n gilt der Satz, daß sie, abgesehen von $G_1 = 0$, sämmtlich ungerade Zahlen sind.

Als Beispiele mögen die nachstehenden Gleichungen dienen:

$$E_1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{2}-\frac{2}{5},$$

$$E_2 = \frac{3}{10} = -1+\frac{1}{2}+\frac{4}{5},$$

$$E_3 = \frac{3^4.7}{130} = 5+\frac{1}{2}-\frac{8}{5}+\frac{6}{13},$$

$$E_4 = \frac{3^4.7^2.11}{170} = 253 + \frac{1}{2} + \frac{16}{5} + \frac{2}{17},$$

$$E_5 = \frac{3^6.7^2.11}{10} = 39299 + \frac{1}{2} - \frac{32}{5}.$$

Die Auffindung des soeben formulirten Satzes und seines Beweises bot darum einige Schwierigkeit dar, weil eine ähnliche Beziehung, wie sie zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und den Summen der Potenzen aufeinanderfolgender ganzen Zahlen besteht, für die Zahlen E_n nicht stattfindet, oder es mir doch wenigstens nicht möglich gewesen ist, eine solche Beziehung zu entdecken. Auf dem Zusammenhange der Bernoulli'schen Zahlen mit den erwähnten Potenzsummen beruhen aber sämmtliche Beweise des v. Staudt-Clausen'schen Satzes; es war daher nothwendig zur Auffindung und zum Beweise des entsprechenden Satzes für die Zahlen E_n neue Hülfsmittel zu beschaffen. Diese habe ich in der Theorie der complexen Multiplication der lemniscatischen Functionen gefunden, wie ich in einer ausführlicheren Arbeit über die Zahlen E_n anderen Ortes zu zeigen gedenke. Dabei werden sich beiläufig auch einige bemerkenswerthe Eigenschaften der Entwicklungscoefficienten der Function $\frac{1}{\wp(u)}$ ergeben.

Aehnliche Sätze, wie für die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen, gelten auch für die Entwicklungscoefficienten derjenigen elliptischen Functionen, deren Periodenverhältniß eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Ob aber diese Sätze allgemein auf die elliptischen Functionen, welche complexe Multiplication zulassen, übertragen werden können, und ob vielleicht sogar für jeden algebraischen Zahlkörper Zahlen existiren, welche für diesen eine ähnliche Bedeutung haben, wie die Bernoullischen Zahlen für den Körper der rationalen Zahlen, das sind Fragen, deren Beantwortung weitergehende Untersuchungen erfordert.

Zürich, den 6. November 1897.